

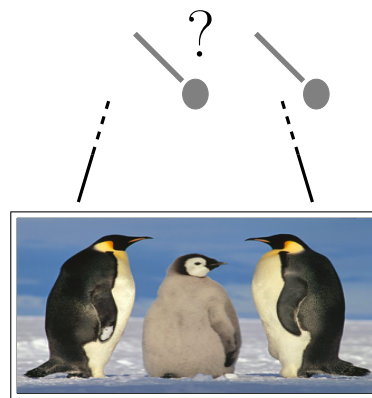
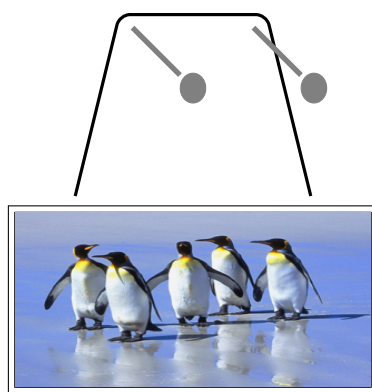


Des ficelles et des clous

Les murs de la maison de Tonton Roger n'étaient pas très solides. Aussi arrivait-il souvent, lorsque l'un d'entre nous se jetait contre la cloison à l'issue d'une course-poursuite effrénée, que sous l'effet des vibrations un clou se détache du mur ; le fracas d'un tableau s'écrasant au sol précédait alors de peu le rugissement de colère légendaire de notre oncle. Un jour que notre agitation avait causé la chute d'un tableau auquel il tenait tout particulièrement, Tonton Roger nous ordonna de le raccrocher. « Je veux qu'il soit tenu par *deux* clous, comme ça, si l'un des deux se détache du mur, l'autre empêchera le tableau de tomber. Au travail ! »

L'oncle était tellement remonté qu'il n'y eut pas moyen de se défilier. Mais notre esprit farceur reprit vite le dessus lorsque Nadine, la plus espiègle d'entre nous, nous montra comment accrocher le tableau à ses deux clous de façon à ce que, *si l'un des deux se détache, n'importe lequel, le tableau tombe inmanquablement par terre !*

Question 1. Comment Nadine accroche-t-elle les tableaux ?

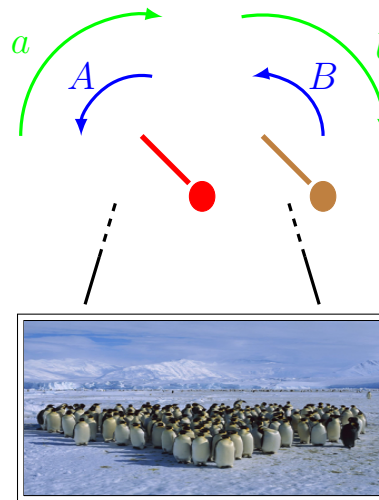




Pour décrire le parcours de la ficelle autour des deux clous, Nadine utilise un mot formé des lettres a, A, b, B , en écrivant

- a quand la ficelle tourne autour du **clou de gauche** dans le **sens des aiguilles d'une montre**,
- A quand la ficelle tourne autour du **clou de gauche** dans le **sens inverse**,
- b quand la ficelle tourne autour du **clou de droite** dans le **sens des aiguilles d'une montre**,
- B quand la ficelle tourne autour du **clou de droite** dans le **sens inverse**.

Par exemple, la façon dont Tonton Roger aurait suspendu ses tableaux, représentée sur le dessin de gauche de la page précédente, est codée par le mot ab .

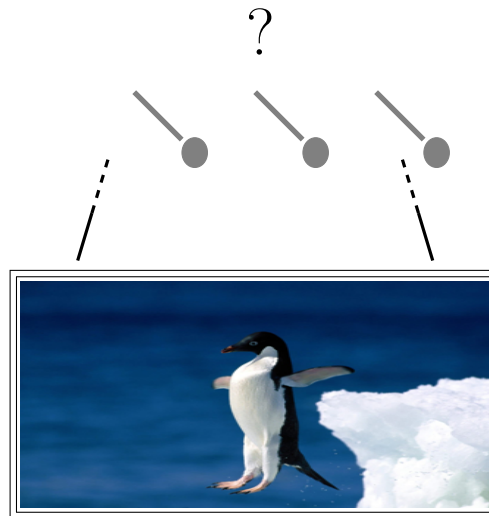


Question 2. Quel est le mot qui décrit votre réponse à la question 1 ? Pouvez-vous décrire *toutes* les réponses possibles à cette question ?



Bien sûr, Tonton Roger s'aperçut vite que le tableau était accroché d'une façon très louche. Voulant en avoir le coeur net, il décrocha l'un des clous et... rattrapa de justesse le tableau qui tombait. Heureusement, en plus d'un goût immodéré pour la peinture et pour les colères soudaines, Tonton faisait preuve d'une grande curiosité. Au lieu de s'énerver, il nous mit au défi de faire la même chose avec **trois** clous : placer la ficelle de façon à ce que dès qu'on enlève l'un des trois clous, n'importe lequel, le tableau tombe.

Question 3. Saurez-vous relever le défi de Tonton Roger ?



Explications

Pour deux clous, les parcours qui conviennent sont ceux pour lesquels le nombre total de tours de ficelle autour de chaque clou est nul ; autrement dit, la ficelle tourne autour de chaque clou autant de fois dans le sens des aiguilles d'une montre que dans le sens inverse. Le codage rend la situation limpide : le mot convient si et seulement si il y a autant de a que de A et autant de b que de B .

Ceci se généralise à un plus grand nombre de lettres : on considère un parcours de la ficelle autour de (par exemple) 26 clous, codé par un mot sur l'alphabet $a, A, b, B, \dots, z, Z$. Retirer un clou revient à supprimer dans notre mot toutes les lettres correspondant à ce clou. Le tableau tombe si et seulement si le mot devient "trivial", au sens où en utilisant les règles $aA = Aa = bB = Bb = \dots = 1$ on arrive à supprimer successivement toutes les lettres du mot. Cette description ne nous dit pas comment trouver un mot qui convienne ; ici les commutateurs peuvent aider. Pour un mot m , on note M le mot inverse, celui qu'entre matheux on noterait m^{-1} , et on note $[m, n]$ le commutateur $mnMN$. Pour deux clous, le mot le plus simple qui convienne est $[a, b] = abAB$. Pour trois clous, une solution est donnée par le commutateur

$$[[a, b], c].$$

De façon générale, si m est un mot sur les 25 premières lettres (et leurs majuscules) qui convient pour 25 clous, alors le mot $[m, z]$ convient pour 26 clous. (Je ne sais pas décrire explicitement tous les mots qui conviennent pour plus de deux lettres, en particulier je ne sais pas si le lien avec les commutateurs est fondamental ; en particulier, je ne sais pas trouver les plus courts).

Ceux qui connaissent auront reconnu le groupe libre ; pour ceux qui ne connaissent pas : on travaille avec les mots en a, A, b, B , et les règles $aA = Aa = bB = Bb = 1$. L'ensemble de tous les mots, quotienté par la relation d'équivalence engendrée par les règles, définit un ensemble G ; la loi de concaténation des mots le muni d'une loi de groupe. Ce groupe est le groupe libre à deux générateurs ; la construction se généralise à un nombre quelconque de lettres. Dans ce groupe, chaque élément a un unique représentant qui est un "mot réduit", c'est-à-dire dans lequel aucune lettre n'est suivie de son inverse. Supprimer toutes les occurrences d'une lettre et de son inverse définit un morphisme de groupe dans le groupe libre avec un générateur de moins ; les mots qui conviennent à notre problème sont ceux qui sont dans l'intersection des noyaux de tous ces morphismes.

Aides

La première question est sans doute la plus difficile, mais les ficelles permettent de faire des essais. Pour aider ceux qui bloquent vraiment, sans comprendre quelle liberté on a, on peut commencer par leur montrer une configuration non standard, par exemple celle où les deux brins issus du tableau passent par dessus le premier clou et se rejoignent en entourant le deuxième. On fait remarquer que ça marche lorsqu'on retire le deuxième, mais pas le premier. Quel est le problème ? (La corde fait un tour autour du second clou, comment faire pour "défaire" ce tour ?)

Pour la question à trois clous, on peut introduire les commutateurs, y compris la notation $[a, b]$.